Gamification and Augmented Reality. 2025; 3:221
doi: 10.56294/gr2025221

ORIGINAL

A proposal for an instructional methodological class on iterative numerical methods for Systems of Linear Equations

Propuesta de clase metodológica instructiva sobre métodos numéricos iterativos para Sistemas de Ecuaciones Lineales

Damian Valdés Santiago[1], Adriana Díaz Cordero[2]

[1]Universidad de La Habana, Departamento Matemática Aplicada, Facultad de Matemática y Computación. La Habana, Cuba.
[2]Universidad de La Habana, Departamento de Matemática, Facultad de Matemática y Computación. La Habana, Cuba.

Citar como: Valdés Santiago D, Díaz Cordero A. A proposal for an instructional methodological class on iterative numerical methods for Systems of Linear Equations. Gamification and Augmented Reality. 2025; 3:221. https://doi.org/10.56294/gr2025221

Enviado: 20-07-2024 **Revisado:** 30-12-2024 **Aceptado:** 19-06-2025 **Publicado:** 20-06-2025

Editor: Dr. Adrián Alejandro Vitón Castillo

Autor para la correspondencia: Damian Valdés Santiago

ABSTRACT

Introduction: the methodological work aimed to enhance teachers' pedagogical preparation to optimize the teaching-learning process, focusing on improving Curriculum E of Computer Science, specifically in the Numerical Mathematics course.
Method: an instructional methodological class was designed based on previous research conducted at the Faculty of Mathematics and Computing at the University of Havana, addressing the numerical solution of systems of linear equations through iterative methods. Documentary analysis, observation, and inductive-deductive methods were used, integrating theoretical foundations, efficient algorithms, and practical exercises. The class followed an introduction, development, and conclusions structure.
Results: the proposal combined a theoretical summary, practical exercises, and comparative approaches, providing a structured pedagogical resource to facilitate conceptual understanding and the application of numerical techniques.
Conclusions: the initiative offers an effective methodological guide for teachers, strengthening the teaching of Numerical Mathematics and promoting significant transformations in the educational process.

Keywords: Computer Science; Instructional Methodological Class; Numerical Mathematics; Methodological Work; Teaching-Educational Process.

RESUMEN

Introducción: el trabajo metodológico buscó mejorar la preparación pedagógica de los docentes para optimizar el proceso de enseñanza-aprendizaje, centrándose en el perfeccionamiento del plan de estudios E de Ciencia de la Computación, específicamente en la asignatura de Matemática Numérica.
Método: se diseñó una clase metodológica instructiva basada en investigaciones previas realizadas en la Facultad de Matemática y Computación de la Universidad de La Habana, enfocada en la solución numérica de sistemas de ecuaciones lineales mediante métodos iterativos. Se utilizaron análisis documental, observación y métodos inductivo-deductivos, la propuesta integró fundamentos teóricos, algoritmos eficientes y ejercicios prácticos. La clase siguió una estructura de introducción, desarrollo, conclusiones.
Resultados: la propuesta integró un resumen teórico, ejercicios prácticos y enfoques comparativos, proporcionando un recurso pedagógico estructurado para facilitar la comprensión conceptual y la aplicación de técnicas numéricas.
Conclusiones: la iniciativa ofrece una guía metodológica efectiva para docentes, fortaleciendo la enseñanza de la Matemática Numérica y promoviendo transformaciones significativas en el proceso educativo.

Palabras clave: Ciencia de la Computación; Clase Metodológica Instructiva; Matemática Numérica; Proceso Docente-Educativo; Trabajo Metodológico.

INTRODUCCIÓN

La Ciencia de la Computación se dedica al análisis de los principios teóricos que rigen los procesos informativos y computacionales, así como a su aplicación en la creación de sistemas computacionales. Este campo avanza en paralelo con el rápido desarrollo de la ciencia y la tecnología, proporcionando soluciones a las necesidades de informatización que plantea la sociedad actual.[1]

Según el plan de estudios E,[2] el trabajo del Licenciado en Ciencia de la Computación se centra en la creación de sistemas computacionales, mediante enfoques matemático-computacionales para resolver de problemas propios o interdisciplinarios.

La disciplina Matemática Aplicada, en dicha carrera, contribuye a la comprensión de la importancia que tiene la aplicación de los métodos matemáticos y la computación. Y esta abarca tres áreas principales: Matemática Numérica, Probabilidades y Estadística y Optimización. Esta disciplina permite resolver problemas de Matemática Básica que no pueden abordarse analíticamente, creando las bases para incorporar modelos y herramientas más complejas en otras áreas de la carrera.

En particular, la Matemática Numérica estudia métodos numéricos fundamentales para aproximar soluciones matemáticas de manera eficiente y algorítmica, respondiendo a la creciente necesidad de algoritmos para modelos científicos y técnicos.

La asignatura prepara al estudiante para analizar, aplicar, modificar y adaptar métodos numéricos generales a situaciones específicas. Los alumnos desarrollan competencias para usar estos métodos eficientemente en entornos computacionales y crear nuevos algoritmos que resuelvan problemas prácticos formulados matemáticamente. El contenido incluye métodos directos para sistemas de ecuaciones algebraicas lineales, factorizaciones matriciales y matrices con propiedades particulares. Entre las habilidades esperadas está la capacidad de seleccionar algoritmos adecuados y adaptarlos según las necesidades.

El trabajo metodológico es un conjunto de actividades continúas realizadas por los docentes en todos los niveles educativos. Su objetivo es mejorar la preparación pedagógico-metodológica y científica de los educadores, asegurando así una ejecución eficiente del proceso educativo. Junto con otras formas de superación profesional y postgraduada, este enfoque busca alcanzar la idoneidad del personal docente y generar influencias positivas en la formación integral de los estudiantes.[3,4] Esto implica establecer objetivos claros, organizar métodos adecuados, regular acciones operativas y controlar el avance hacia los objetivos establecidos.[3]

La planificación cuidadosa del proceso docente asegura una enseñanza efectiva basada en principios didácticos que promuevan un aprendizaje óptimo. El profesor desempeña un papel clave al garantizar calidad en la enseñanza, orientando, evaluando y controlando a los estudiantes para facilitar su formación integral.[3,5] En el proceso docente se manifiestan los métodos y formas de enseñanza.[6] Por el primero entendemos el modo de realizar las acciones el profesor y los estudiantes para alcanzar los objetivos, y por forma de enseñanza, la estructura organizativa que se adopta, en un momento dado en el proceso docente, con el fin de lograr los objetivos.

En este contexto, las clases metodológicas poseen dos modalidades: La clase metodológica demostrativa (CMD) y la clase metodológica instructiva (CMI). La CMI enfrenta mayores desafíos debido a su complejidad. A diferencia de la CMD, se centra en problemas metodológicos identificados en lugar de impartir una clase del programa. Su objetivo esencial es instruir a los docentes en determinados aspectos que constituyen el centro de las dificultades detectadas.[7,8] El tratamiento metodológico debe estar vinculado al contenido conceptual de la asignatura o aspecto científico abordado. Esto implica identificar contradicciones didácticas entre el contenido y su orientación metodológica para optimizar el aprendizaje de los estudiantes.[7,9]

Las CMI no existen aisladas; se integran con otras formas del trabajo metodológico concebidas como un sistema desde su planificación hasta su ejecución. Estas clases identifican prioridades según deficiencias detectadas mediante asesoramiento y control organizativo. Proponen soluciones didácticas a las insuficiencias detectadas.[7] Este trabajo tiene como objetivo diseñar una CMI sobre la solución numérica de sistemas de ecuaciones lineales (SEL) mediante métodos iterativos, sirviendo como guía para profesores menos experimentados en su desarrollo como docentes universitarios.

MÉTODO

Se realizó una investigación en el campo de la educación matemático-computacional, en la Facultad de Matemática y Computación de la Universidad de La Habana, para presentar una de clase metodológica instructiva sobre la solución numérica de sistemas de ecuaciones lineales mediante métodos iterativos.

Se definió el objetivo metodológico instructivo y la línea de trabajo metodológico. Se propuso el sumario de la actividad docente a desarrollar, y el desarrollo de la clase con sus tres partes de introducción, desarrollo y conclusiones.

DESARROLLO

A continuación, se aborda los elementos de la CMI según Alonso Berenguer et al.[7]

Clase Metodológica Instructiva

Objetivo Metodológico

Instruir a los docentes cómo utilizar alternativas metodológicas para desarrollar la actividad docente sobre la solución numérica de sistemas de ecuaciones lineales usando métodos iterativos, para promover un aprendizaje significativo.

Línea de trabajo metodológico

Perfeccionamiento de la dirección del aprendizaje para estimular un aprendizaje desarrollador y significativo en la solución numérica de sistemas de ecuaciones lineales usando métodos iterativos.

Carrera: Ciencia de la Computación

Disciplina: Matemática Aplicada.

Asignatura: Matemática Numérica. Segundo Año.

Tema III: Solución numérica de sistemas de ecuaciones lineales

Actividad Docente: Métodos iterativos para la solución numérica de sistemas de ecuaciones lineales.

Sumario: Necesidad de métodos iterativos para un sistema de ecuaciones lineales. Resolución de un sistema de ecuaciones lineales mediante iteración de punto fijo. Convergencia. Iteración de Jacobi y sus condiciones de convergencia. Iteración de Gauss-Seidel y sus condiciones de convergencia. Teoremas de convergencia. Ejemplos. Ventajas y desventajas frente a los métodos directos.

Forma de organización de la enseñanza: Conferencia.

Duración: 2 hora/clase.

Bibliografía básica

- Burden RL et al.[10]. Numerical analysis. Cengage Learning, pp. 431-495.

Bibliografía complementaria

- Heath MT[11]. Scientific Computing: An Introductory Survey (Revised Ed). Society for Industrial and Applied Mathematics, pp. 466-470.

Métodos: expositivo, elaboración conjunta y participativo.

Medios: pizarra y plumones, diapositivas, computadoras.

Evaluación: observación del trabajo de los estudiantes, preguntas orales y discusiones grupales.

El profesor debe ser ejemplo con su puntualidad y porte y aspecto. El local debe estar limpio, con buena iluminación y ventilación, sin objetos que puedan distraer al estudiante.

Introducción

Se controla la asistencia y puntualidad de los estudiantes. A continuación, se realiza un comentario que será la motivación de la clase, expresando que muchos de los problemas de la matemática aplicada pueden reducirse a problemas de resolución de sistemas lineales de ecuaciones. Por ejemplo, la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias o parciales mediante métodos de diferencias finitas, problemas de valores propios, ajuste de datos mediante mínimos cuadrados y la aproximación polinomial; estos dos últimos temas tratados posteriormente en la asignatura.

Al ser un tema nuevo se realiza un recordatorio de conferencia anterior donde se abordó el tema del análisis del error en el método de eliminación de Gauss. Junto con esto, se realizan preguntas de control para tener retroalimentación de la conferencia previa, donde se propicia el debate con los estudiantes, evaluando a los que voluntariamente decidan responder, según la calidad de sus respuestas dándole una nota (2, 3, 4 o 5).

Para ello, se recuerda la definición del problema a resolver: $Ax=b$, A es cuadrada e inversible. Esta definición la conocen de la asignatura Álgebra I, que se imparte en primer año de la carrera. En este punto, se interroga a los estudiantes: ¿Qué significa resolver un SEL? ¿Qué métodos de resolución de SEL conocen? De forma que vinculen el contenido con la asignatura precedente, en donde resolvieron SEL de forma analítica y manual, con la actual.

Se señala que el uso de determinantes para la resolución de SEL conlleva un alto costo computacional, específicamente en matrices de mayor orden. Aprovechando se les pregunta a los estudiantes: ¿Cuál es el

https://doi.org/10.56294/gr2025221 ISSN: 3008-9093

costo computaciones de resolver un SEL mediante la regla de Cramer y desarrollo por menores? Esta forma de solución requiere aproximadamente operaciones, que es computacionalmente impracticable.

Luego, se les pregunta ¿qué es un método directo? Se les recuerda que un método directo para resolver un SEL es aquel que, en ausencia de errores de redondeo, producirá la solución exacta después de un número finito de operaciones aritméticas elementales. Se destaca que, en la práctica, debido a que estos errores existen, los métodos directos no conducen a soluciones exactas. Así se relaciona este tercer tema de la asignatura con el primero, referido a la aritmética de punto flotante y la propagación del error. Se señala también que en los métodos directos no existe error de truncamiento y que el método directo fundamental es el método de eliminación de Gauss, que ya han conocido en la conferencia.

Además, se señala que la solución de grandes SEL y densos es computacionalmente impracticable; el cálculo de determinantes numéricos, aunque no es aconsejable para resolver sistemas, en ocasiones se requiere para otros fines; la inversión de matrices es un procedimiento ineficiente para un sistema de orden ; así como que existen problemas mal condicionados, donde la condición de la matriz involucrada permite la propagación del error al utilizar el algoritmo de eliminación de Gauss. Todo ello motivo el estudio de los métodos iterativos para resolver SEL.

Se explica que los métodos iterativos producen una sucesión infinita de soluciones aproximadas, sucesión que, bajo ciertas condiciones, converge hacia la solución exacta del problema.

Estos métodos iterativos se utilizan en matrices dispersas, donde los requerimientos de memoria son (n) y no (n^2). En ocasiones, la matriz cumple ciertas propiedades, que hacen que los métodos iterativos se puedan usar exitosamente. Después de haber visto los métodos directos, se indica el estudio de los métodos iterativos para resolver un SEL.

Luego de esta exposición se presenta el sumario de la conferencia y se orientan sus objetivos, así como la bibliografía básica y complementaria para la profundización de los contenidos.

Objetivos

- Describir las características de los métodos directos y los métodos iterativos para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.
- Describir los métodos iterativos de Jacobi y de Seidel para un sistema de ecuaciones lineales y sus condiciones de convergencia.
- Resolver un sistema de ecuaciones lineales mediante los algoritmos de Jacobi y de Seidel manual o computacionalmente.
- Realizar un análisis comparativo entre los algoritmos de Jacobi y de Seidel.
- Decidir los algoritmos preferibles para resolver un sistema de ecuaciones lineales.

Desarrollo de la conferencia

Posteriormente, se orienta el contenido y se ejecuta la conferencia, aplicando los métodos mencionados y apoyándose en los medios necesarios. Se controla el progreso de los estudiantes y se realizan las aclaraciones que se consideren necesarias en cada momento.

Se expone que los métodos iterativos para la resolución de sistemas lineales más simples y conocidos son iteraciones de punto fijo. Se recuerda la iteración de punto fijo para una ecuación no lineal impartida en el tema II de la asignatura Matemática Numérica:

$$f(x) = 0 \rightsquigarrow x = g(x),$$
$$x_{k+1} = g(x_k).$$

La iteración de punto fijo estudiada puede generalizarse a un sistema de ecuaciones no lineales:

$$f(x) = 0,$$
$$f: S \to \mathbb{R}^n,\ S \subseteq \mathbb{R}^n,$$
$$f(x) = 0 \rightsquigarrow x = g(x),$$
$$x^{(k+1)} = g\left(x^{(k)}\right),\ k = 0,\ 1,\ 2, \cdots$$

Se presenta el diagrama de la figura 1, donde se ubican los métodos iterativos para sistemas de ecuaciones lineales, dentro de los enfoques de iteración de punto fijo.

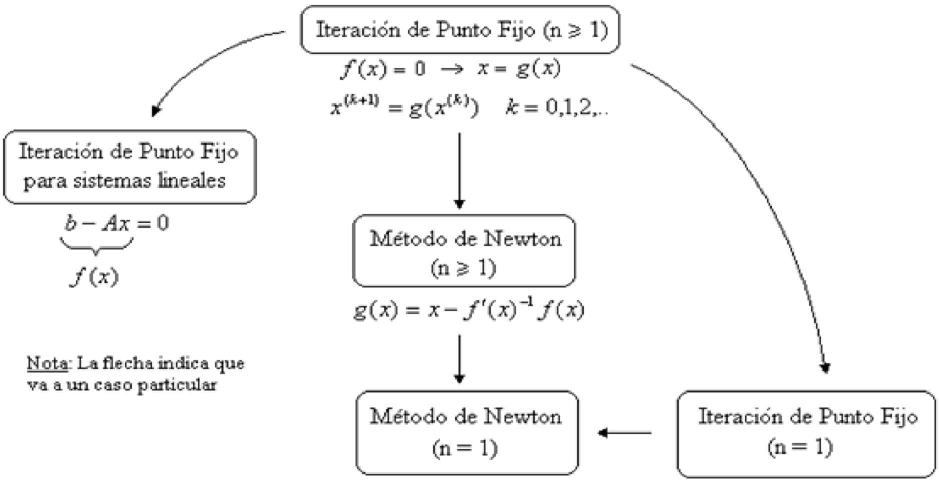

Figura 1. Enfoques de iteración de punto fijo para soluciones ecuaciones no lineales y sistemas de ecuaciones lineales

Luego, se expone que la iteración de punto fijo para sistemas lineales es un caso particular de iteración de punto fijo para sistemas no lineales, donde se tiene que resolver:

$$Ax=b \text{ o } f(x)=b-Ax=0 \rightsquigarrow x=Bx+c,$$
$$x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+c,\ k=0,1,\cdots,$$

Donde:
B es una matriz n×n (llamada matriz de iteración) c es un n-vector.

Se aplica esta iteración con la esperanza de que esta converja a la solución exacta ξ (que es desconocida). Entonces, se les presenta la siguiente interrogante a los estudiantes: ¿Cuándo una sucesión de vectores converge a un vector ξ? Aquí se realiza un contraste con las iteraciones de punto fijo para resolver una ecuación no lineal y se muestra la necesidad de definir qué significa convergencia a un vector.

De esta manera se establece sucesiones de vectores que se obtienen al aplicar sucesivamente los métodos iterativos para resolver un sistema de ecuaciones lineales, que se espera converja a la solución exacta ξ:

$$\begin{array}{ccccc} x^{(0)} & x^{(1)} & x^{(2)} & \cdots \rightarrow & \xi \\ \begin{pmatrix} x_1{}^{(0)} \\ x_2{}^{(0)} \\ \vdots \\ x_n{}^{(0)} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} x_1{}^{(1)} \\ x_2{}^{(1)} \\ \vdots \\ x_n{}^{(1)} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} x_1{}^{(2)} \\ x_2{}^{(2)} \\ \vdots \\ x_n{}^{(2)} \end{pmatrix} & \begin{matrix} \cdots \rightarrow \\ \cdots \rightarrow \\ \vdots \\ \cdots \rightarrow \end{matrix} & \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}. \end{array}$$

Esta convergencia se alcanza formalmente cuando:

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k)}=\xi \Leftrightarrow \left[\text{para } i=1,2,\cdots,n,\ \lim_{k\to\infty} x_i{}^{(k)}=\xi_i\right],$$

O, equivalentemente:

$$\lim_{k\to\infty}\left\|x^{(k)}-\xi\right\|=0$$

El caso más simple de iteración de punto fijo para SEL es la iteración de Jacobi. Supongamos que todos los elementos de la diagonal de A son desiguales de cero. En esta iteración se toman B=BJ=(bij) y c=(ci) como:

$$b_{ij}=\begin{cases} -\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}}, & \text{si } i\neq j \\ 0, & \text{si } i=j \end{cases},$$
$$c_i=\frac{b_i}{a_{ii}},\ \ i,\ j=1,\ 2,\cdots,\ n.$$

Se observa que esto es equivalente a despejar en Ax=b, x_i en la ecuación i-ésima.

A continuación, se expone un ejemplo de construcción de la matriz de iteración de Jacobi: Dado el sistema:

$$\begin{aligned} 10x_1 + x_2 + x_3 &= 12 \\ 2x_1 + 10x_2 + x_3 &= 13 \\ x_1 + 3x_2 + 10x_3 &= 14 \end{aligned}$$

Cuya solución exacta es $\xi=(1,1,1)^T$. Para i=1,2,3, despejamos x_i en la ecuación i-ésima:

$$\begin{aligned} x_1 &= \quad -\frac{1}{10}x_2 - \frac{1}{10}x_3 + \frac{12}{10} \\ x_2 &= -\frac{2}{10}x_1 \quad - \frac{1}{10}x_3 + \frac{13}{10}, \\ x_3 &= -\frac{1}{10}x_1 - \frac{3}{10}x_2 \quad + \frac{14}{10} \end{aligned}$$

$$x = \begin{pmatrix} 0 & -0.1 & -0.1 \\ -0.2 & 0 & -0.1 \\ -0.1 & -0.3 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1.2 \\ 1.3 \\ 1.4 \end{pmatrix}$$

$$x = B_J x + c.$$

Al implementar el método se obtiene que:

$$\begin{array}{ccccc} B_J & c & x^{(0)} & x^{(1)} & x^{(2)} \\ \begin{pmatrix} 0 & -0.1 & -0.1 \\ -0.2 & 0 & -0.1 \\ -0.1 & -0.3 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1.2 \\ 1.3 \\ 1.4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1.2 \\ 1.3 \\ 1.4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0.93 \\ 0.92 \\ 0.89 \end{pmatrix} \end{array}$$

Donde puede verse que la iteración está convergiendo a $\xi=(1,1,1)^T$.

Luego, se señala que la iteración de punto fijo para SEL no siempre converge, como sucedió en el ejemplo. Si tomamos el SEL:

$$\begin{aligned} 4x_1 - 3x_2 + 5x_3 &= 25 \\ 3x_1 + 2x_2 + +x_3 &= 11, \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= -4 \end{aligned}$$

El método de Jacobi no converge hacia la solución del sistema, que es $\xi=(3,-1,2)^T$. En la tabla 1 se ilustra este comportamiento. Se exhorta a los estudiantes a implementar dicho algoritmo en el lenguaje de programación Python y replicar los ejemplos donde la iteración converge y donde no lo hace.

Tabla 1. Comportamiento de la iteración de Jacobi en un caso donde no hay convergencia

Iteración	x_1	x_2	x_3
0	0,0	0,0	0,0
1	6,25	5,5	-1,3333
2	12,0417	2,5417	10,6667
3	-8,9896	-23,2292	13,0298
4	-27,4566	5,9566	-28,8056
5	46,7244	75,4905	-33,9711
6	105,3317	30,6155	111,2928
7	-155,8277	263,7907	118,6985

Es por ello, que estudiaremos condiciones de convergencia, pero primero es necesaria la definición de radio espectral de una matriz B como:

$$\rho(B) = \max_{i=1,2,\cdots,n} \{|\lambda_i| : \lambda_i \text{ es un valor propio de } B\}.$$

Para su interpretación geométrica, supongamos que $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$. Por ejemplo, si n=5, el radio espectral de una matriz es el radio del menor círculo en el plano complejo con centro en el origen que contiene a todos los valores propios de la matriz (figura 2).

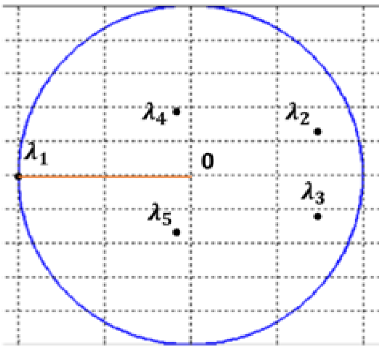

Figura 2. Interpretación geométrica del radio espectral de una matriz de orden 5

La norma espectral y el radio espectral están relacionados:

$$\|A\|_2 = \|A\|_S = \sqrt{\rho(A^T A)}$$

Lo cual puede justificarse, y se orienta como ejercicio independiente.

Una vez definido radio espectral, presentamos una condición necesaria y suficiente para la convergencia de iteración de punto fijo para sistema de ecuaciones lineales:

Teorema

Sea Ax=b un sistema lineal, y $x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+c$, k=0,1, una iteración de punto fijo correspondiente. Esta iteración es convergente (independientemente de $x^{(0)}$ y de b) si y solo si $\rho(B)<1$. Para toda norma, se cumple que $\rho(B)\leq\|B\|$, es decir, el radio espectral de una matriz es siempre menor o igual que cualquiera de sus normas. La demostración de esta propiedad se orienta también como tarea.

En nuestro ejemplo:

$$B_J = \begin{pmatrix} 0 & -0.1 & -0.1 \\ -0.2 & 0 & -0.1 \\ -0.1 & -0.3 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\|B_J\|_1 = 0.4,$$
$$\|B_J\|_2 \approx 0.34,$$
$$\|B_J\|_\infty = 0.4,$$
$$\|B_J\|_F = \sqrt{0.17} \approx 0.412.$$

Y en efecto, $\rho(B)\approx 0,29$ es menor que los valores anteriores.

¿Qué consecuencia tiene esta propiedad y el teorema enunciado? Esto implica que la iteración de punto fijo converge (independientemente de $x^{(0)}$ y de b) si y solo $\|B\|<1$, para alguna norma matricial. En la práctica aplicamos con mayor frecuencia la suficiencia, es decir, tratamos de encontrar una norma matricial tal que $\|B\|<1$. De esta manera se asegura entonces la convergencia.

Antes de analizar la convergencia del método de Jacobi, se expone la siguiente definición: Una matriz $A=(a_{ij})$ de orden n es diagonalmente dominante por filas en sentido estricto si:

$$|a_{ii}| > \sum_{j\neq i} |a_{ij}|, \text{ para } i = 1,2,\cdots,n.$$

Por ejemplo, la matriz:

https://doi.org/10.56294/gr2025221 ISSN: 3008-9093

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix},$$

Es diagonalmente dominante por filas en sentido estricto.

Como consecuencia, para el sistema Ax=b, si A es diagonalmente dominante por filas en sentido estricto, entonces la iteración de Jacobi correspondiente es convergente (condición suficiente del teorema). Se exhorta a los estudiantes a comprobar que en el SEL de ejemplo:

$$\begin{aligned} 10x_1 + x_2 + x_3 &= 12 \\ 2x_1 + 10x_2 + x_3 &= 13, \\ x_1 + 3x_2 + 10x_3 &= 14 \end{aligned}$$

El método de Jacobi converge. Con estos elementos, se expone el algoritmo de iteración de Jacobi. Dado el SEL Ax=b de orden n cuya matriz de coeficientes $A=(a_{ij})$ tiene todos los elementos de la diagonal desiguales de cero. Calcular los elementos de $B_J=(b_{ij})$ y $c=(c_i\ )$ mediante:

$$b_{ij} = \begin{cases} -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}, & si\ i \neq j \\ 0, & si\ i = j \end{cases};\ \ c_i = \frac{b_i}{a_{ii}},\ i,j = 1,\cdots,n$$

Tomar un $x^{(0)}$, por ejemplo $x^{(0)}=0$.

Para k=1,2,⋯, hasta terminar, repetir:

Para i=1,2,⋯,n repetir:

$$x_i^{(k)} = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} b_{ij} x_j^{(k-1)} + c_i$$

Se señala entonces que a la iteración de Jacobi se le llama también método de los desplazamientos simultáneos, porque para el cálculo de cualquier componente de x^((k)), solo utiliza componentes de x^((k-1)) (ver de nuevo ejemplo numérico inicial).

Por otra parte, existe otra forma de iteración llamada de Gauss-Seidel (también llamado método de los desplazamientos sucesivos), porque para el cálculo de una componente de x^((k)), usamos las componentes anteriores del propio vector.

A continuación, se expone la iteración de Gauss-Seidel para resolver un SEL:

Dado el sistema lineal Ax=b de orden n cuya matriz de coeficientes $A=(a_{ij}\ )$ tiene todos los elementos de la diagonal desiguales de cero.

Calcular los elementos de $B_J=(b_{ij})$ y $c=(c_i)$ mediante:

$$b_{ij} = \begin{cases} -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}, & si\ i \neq j \\ 0, & si\ i = j \end{cases};\ c_i = \frac{b_i}{a_{ii}}\ ,\ i,j = 1,\cdots,n$$

Tomar un $x^{(0)}$, por ejemplo $x^{(0)}=0$.

Para k=1,2,⋯, hasta terminar, repetir:

Para i=1,2,⋯,n repetir:

$$x_i^{(k)} = \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} x_j^{(k)} + \sum_{j=i+1}^{n} b_{ij} x_j^{(k-1)} + c_i$$

Luego, se presenta un ejemplo numérico de esta iteración:

$$
\begin{array}{ccccc}
B_J & c & x^{(0)} & x^{(1)} & x^{(2)} \\
\begin{pmatrix} 0 & -0.1 & -0.1 \\ -0.2 & 0 & -0.1 \\ -0.1 & -0.3 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1.2 \\ 1.3 \\ 1.4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1.2 \\ 1.06 \\ 0.962 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0.9978 \\ 1.00424 \\ 0.998948 \end{pmatrix}.
\end{array}
$$

Puede verse que la iteración está convergiendo a $\xi=(1,1,1)^T$. Además, lo hace más rápidamente que en el método de Jacobi. Para verificarlo se orienta al estudiante calcular $\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\|_\infty$, para k=1,2.

1. Posteriormente, se exponen las condiciones de convergencia de ambos métodos: Sea la matriz de iteración de Jacobi puede demostrarse que:
2. Si $\|B_J\|_\infty<1$, entonces ambos métodos convergen y el de Gauss-Seidel lo hace con mayor rapidez.
3. Si $\|B_J\|_1<1$, entonces ambos métodos convergen, pero no puede afirmarse en principio cuál lo hace más rápido.
4. Si $\|B_J\|_F<1$, entonces el método de Jacobi converge, pero no puede afirmarse nada acerca de la convergencia de la iteración de Gauss-Seidel.
5. Si A es diagonalmente dominante por filas en sentido estricto, entonces estamos en el caso 1.
6. Si A es simétrica y definida positiva, entonces el método de Gauss-Seidel converge.

CONCLUSIONES

Se sistematizan los contenidos impartidos y se resumen las ventajas y desventajas de los métodos para resolver numéricamente un SEL.

Las técnicas directas proporcionan teóricamente la solución exacta del sistema en un número finito de pasos. En la práctica, la solución tendrá error de redondeo debido a la aritmética de punto flotante, por lo que debe controlarse el error. Las técnicas iterativas casi nunca se usan para resolver sistemas lineales de dimensiones pequeñas, pues el tiempo requerido para suficiente precisión excede el requerido para las técnicas directas. Para grandes sistemas con un alto porcentaje de entradas nulas (esparcidad) las técnicas iterativas son computacionalmente eficientes.(10)

Además, los métodos directos no requieren estimación inicial de la solución. Los métodos directos son buenos para producir una alta precisión, pero no aprovechan si sólo se necesita una precisión baja. Los métodos iterativos dependen de propiedades de la matriz y convergen lentamente en sistemas mal condicionados. Los métodos directos son más robustos en ambos sentidos. Los métodos iterativos son buenos cuando la matriz se produce bajo demanda.(11)

Luego, se realizan preguntas a los estudiantes sobre los aspectos clave a aprender en esta clase que les permitan cumplir los objetivos de la misma:

1. ¿Por qué son necesarios métodos iterativos para resolver un SEL, si ya existen métodos directos como el de Gauss?
2. ¿Cómo se expresa la resolución de un SEL como iteración de punto fijo?
3. ¿Qué significa que dicha iteración converja para el caso de un SEL?
4. ¿Qué iteraciones hemos estudiado? ¿Siempre convergen?
5. ¿Cómo comprobar computacionalmente las condiciones de convergencia?

Finalmente, como estudio independiente se orienta resolver el siguiente ejercicio para aplicar las condiciones de convergencia de los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel, la verificación numérica de dichas condiciones y comprender las ventajas y desventajas de los métodos:

Considere el sistema Ax=b, donde:

$$
A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

1. ¿Podemos asegurar teóricamente que el método de Jacobi converge?
2. Efectúe dos pasos del mismo.
3. ¿Está convergiendo en la práctica? Explique.
4. Lo mismo que (a) pero respecto al método de Gauss-Seidel.
5. Lo mismo que (b) pero respecto al método de Gauss-Seidel.
6. Lo mismo que (c) pero respecto al método de Gauss-Seidel.
7. Compare los resultados de los incisos (e) y (b)
8. Sean BGS y cGS la matriz de iteración y el vector constante, respectivamente, del método de Gauss-Seidel. Hallar BGS y cGS.

9. ¿Es ‖BGS‖<1 para alguna norma? ¿Qué importancia tiene esto?
10. Efectuar $x^{(k+1)}=B_{GS}\ x^{(k)}+c_{GS}$, para k=0,1.
11. Compare los resultados de los incisos j) y e).

CONCLUSIONES

La clase metodológica instructiva propuesta busca capacitar a los docentes en la impartición de conferencias sobre la solución numérica de sistemas de ecuaciones lineales (SEL) mediante métodos iterativos, promoviendo un aprendizaje significativo en los futuros graduados en Ciencia de la Computación. Este enfoque metodológico considera la naturaleza del contenido y las relaciones entre los temas, la asignatura y la disciplina, favoreciendo el desarrollo personal y profesional del estudiante.

Durante la conferencia se resumieron los contenidos, se realizaron dinámicas grupales para evaluar el aprendizaje y se resolvieron ejercicios típicos del tema, comparando diferentes enfoques para abordar los SEL. La metodología presentada puede servir como modelo para otros docentes en la enseñanza de Matemática Numérica en universidades cubanas y extranjeras.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Figueroa KM, Hoyos G de J, Martínez M de L, Morales R. La importancia del pensamiento computacional en la era digital. In: Carreño (eds.). Pensamiento Computacional en Iberoamérica. México: Academia Mexicana de Computación; 2023. https://amexcomp.mx/media/publicaciones/pensamiento-computacional-version-final-portada-reduced.pdf#page=34

2. Universidad de La Habana. Plan de Estudio “E”, Carrera Ciencia de la Computación. La Habana, Cuba: 2017.

3. García González MC, Varela de Moya HS, Espíndola Artola A. Las formas del trabajo docente metodológico en el contexto actual de la educación superior. Humanidades Médicas 2019;19(3):607–36. http://scielo.sld.cu/scielo.php?script=sci_abstract&pid=S1727-81202019000300607&lng=es&nrm=iso&tlng=es

4. Ministerio de Educación Superior. Resolución 47: Reglamento Trabajo Docente y Metodológico. Ministerio de Educación Superior, Cuba. La Habana, Cuba: Ministerio de Educación Superior, Cuba; 2022.

5. Chaviano O, Baldomir T, Coca O, Gutiérrez A. La evaluación del aprendizaje: nuevas tendencias y retos para el profesor. Edumecentro 2016;8(4):191–205. https://www.medigraphic.com/cgi-bin/new/resumen.cgi?IDARTICULO=68398

6. Addine F, Recarey S, Fuxá M, Fernández S. Didáctica: teoría y práctica. La Habana, Cuba: Editorial Pueblo y Educación; 2020.

7. Alonso I, Gorina A, Iglesias N. ¿Cómo estructurar y desarrollar una clase metodológica instructiva? Rev Roca 2020. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=7414322

8. Guerrero E. Análisis lógico semántico del contenido de las clases metodológicas instructivas. Didasc@lia Didáctica y Educ 2018 [cited 2025 Feb 2];9(3):129–44. https://revistas.ult.edu.cu/index.php/didascalia/article/view/778

9. Méndez AR, García O. El problema conceptual metodológico y el docente metodológico. Aproximación a sus rasgos distintivos. Roca Rev Científico-Educaciones la Prov Granma 2018 [cited 2025 Feb 2];14(3):133–42. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=6759635

10. Burden RL, Faires DJ, Burden AM. Análisis numérico. Santa Fe, México: Cengage Learning Editores; 2017. https://biblioteca.uazuay.edu.ec/buscar/item/80835

11. Heath MT. Scientific Computing Scientific Computing: An Introductory Survey. Revised Ed. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics; 2018. https://e6.ijs.si/~roman/files/tmp/M.Heath-SComputing/scientific-computing-michael-t-heath.pdf

FINANCIACIÓN

Los autores no recibieron financiación para el desarrollo de la presente investigación.

CONFLICTO DE INTERESES

Los autores declaran que no existe conflicto de intereses.

CONTRIBUCIÓN DE AUTORÍA

Conceptualización: Damian Valdés Santiago, Adriana Díaz Cordero.
Curación de datos: Damian Valdés Santiago.
Análisis formal: Damian Valdés Santiago, Adriana Díaz Cordero.
Investigación: Damian Valdés Santiago.
Metodología: Damian Valdés Santiago.
Administración del proyecto: Damian Valdés Santiago.
Recursos: Damian Valdés Santiago.
Software: Damian Valdés Santiago.
Supervisión: Damian Valdés Santiago.
Validación: Damian Valdés Santiago.
Visualización: Adriana Díaz Cordero.
Redacción – borrador original: Damian Valdés Santiago.
Redacción – revisión y edición: Adriana Díaz Cordero.